PERFORMANS GÖREVİ RAPORU

Matematik Dersi: Koşullu Olasılık ve Gerçek Yaşam Uygulamaları

Görev Adı:	Bir Olayın Gerçekleşmesinin Diğer Bir Olayın Meydana Gelmesine Bağlı Olduğu Durumların Olasılığını Mevcut Bilgiye/Veriye Dayalı Tahmin Edebilme
Beklenen Performans:	Güncel yaşam durumlarına ait olasılık problemi oluşturma, problemi çözme ve çözüm yollarını sunma
Konu / Öğrenme Alanı:	Olasılık / Koşullu Olasılık ve Bayes Teoremi

1. ÇALIŞMA PLANI VE TAKİP EDİLEN ADIMLAR

Bu çalışma kapsamında, bağımlı olaylar ve koşullu olasılık kavramlarının günlük yaşam kararlarındaki kritik rolünü incelemek amacıyla 4 aşamalı bir çalışma planı oluşturulmuş ve eksiksiz uygulanmıştır.

Aşama	Eylem / Faaliyet	Yöntem & Araçlar	Çıktı
1. Planlama	Konunun teorik altyapısının incelenmesi ve problem temalarının belirlenmesi.	Literatür taraması, Bayes Teoremi ve Koşullu Olasılık formüllerinin gözden geçirilmesi.	Çalışma takvimi ve 4 ana problem temasının tespiti.
2. Problem Kurgusu	Sağlık, meteoroloji, sanayi kalite kontrolü ve siber güvenlik alanlarında 4 özgün senaryo yazımı.	Gerçekçi istatistiki veri oranlarının kurgulanması ve matematiksel tutarlılık testi.	4 adet gerçek yaşam koşullu olasılık metni.
3. Çözüm & Görselleştirme	Problemlerin analitik çözümü ve karar ağacı/tablo görsellerinin hazırlanması.	Bayes Formülü, Karar Ağaçları, Kontenjans Tabloları ve Matplotlib grafiksel çizimleri.	Çözüm adımları ve diyagram görselleri.
4. Raporlama	Bulguların analiz edilip dijital sunum ve rapor biçiminde derlenmesi.	Dijital yayıncılık standartlarına uygun PDF ve DOCX belge üretimi.	Performans Ödevi Raporu.

Takip Edilen Adımlar:

1. **Olay Değişkenlerinin Tanımlanması:** Her problem durumu için ana olaylar (A, B) net bir şekilde sembolize edilmiştir.
2. **Önsel Olasılıkların (Prior Probabilities) Belirlenmesi:** Problemlerde verilen temel oranlar ($P(A)$, $P(B)$) çıkarılmıştır.
3. **Koşullu Olasılıkların Modellenmesi:** Bir olayın gerçekleşmesi durumunda diğer olayın olasılığı ($P(B|A)$) modellenmiştir.

4. **Matematiksel Hesaplama:** Bayes Teoremi ve Toplam Olasılık Formülü kullanılarak nihai tahmin yürütülmüştür.
5. **Görselleştirme ve Yorumlama:** Sonuçlar karar ağacı, venn şeması ve tablolarla desteklenerek gerçek yaşam riski yorumlanmıştır.

2. GERÇEK YAŞAM KOŞULLU OLASILIK PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

Problem 1: Tıbbi Tarama Testlerinin Doğruluğu ve Yalancı Pozitiflik (Sağlık Analizi)

Problem Senaryosu:
Bir toplumda nadir görülen bir hastalığın görülme sıklığı %1'dir ($P(H) = 0.01$). Bu hastalığı tespit etmek için geliştirilen bir tıbbi tarama testinin duyarlılığı (hastalarda pozitif sonuç verme oranı) %95'tir ($P(+|H) = 0.95$). Sağlıklı bireylerde ise testin yanlışlıkla pozitif sonuç verme oranı (yalancı pozitiflik) %2'dir ($P(+|S) = 0.02$).

Rastgele seçilen bir kişiye yapılan testin **POZİTİF** çıktığı bilindiğine göre, bu kişinin **GERÇEKTEN HASTA OLMA OLASILIĞI** kaçtır?

Çözüm ve Matematiksel Model:

Olayları tanımlayalım:

- H: Kişinin hasta olması → $P(H) = 0.01$
- S: Kişinin sağlıklı olması → $P(S) = 1 - 0.01 = 0.99$
- $+$: Testin pozitif çıkması

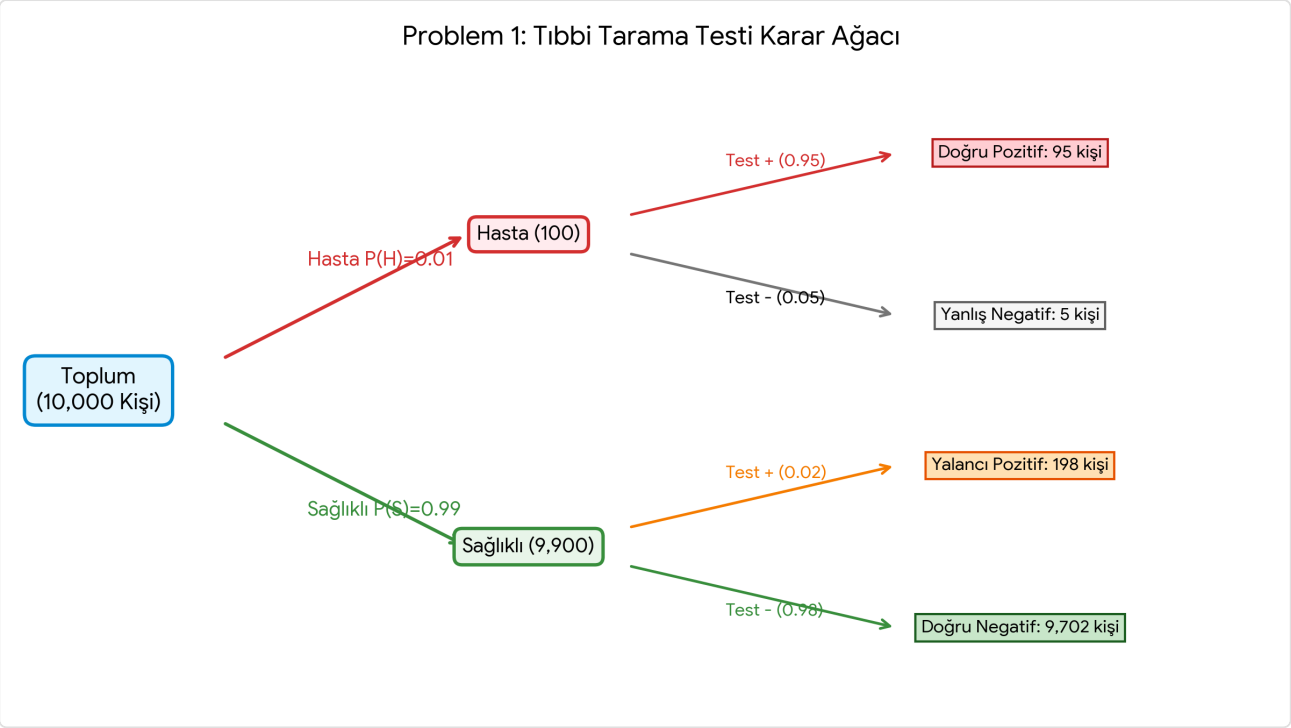
İstenen olasılık: $P(H|+)$ (Test pozitifken kişinin hasta olma olasılığı).

Bayes Teoremi uygulanırsa:

$$P(H|+) = [\ P(+|H) \times P(H)\ ] / P(+)$$

Pay (Aşama 1 - Doğru Pozitif): $P(+|H) \times P(H) = 0.95 \times 0.01 = 0.0095$
Payda (Toplam Pozitif Olasılığı): $P(+) = P(+|H) \times P(H) + P(+|S) \times P(S)$
$P(+) = (0.95 \times 0.01) + (0.02 \times 0.99) = 0.0095 + 0.0198 = 0.0293$

$$P(H|+) = 0.0095 / 0.0293 \approx 0.3242\ (\%32.42)$$



Şekil 1: 10,000 Kişilik Popülasyonda Tıbbi Tarama Testi Karar Ağacı Dağılımı

Gerçek Yaşam Yorumu: Test %95 gibi yüksek bir doğruluğa sahip görünse de, hastalığın toplumda nadir olması (%1) nedeniyle, testi pozitif çıkan bir kişinin gerçekten hasta olma olasılığı sadece **%32.42**'dir. Testi pozitif çıkanların %67.58'i aslında sağlıklı bireylerdir (yalancı pozitif). Bu durum, nadir hastalıklarda tek bir testle teşhis konulamayacağını, doğrulama testlerinin (örn. biyopsi/PCR) şart olduğunu gösterir.

Problem 2: Meteorolojik Yağış Tahminlerinin Doğruluğu (Hava Tahmini)

Problem Senaryosu:
Bir bölgenin meteoroloji istasyonu verilerine göre, bir yılda (365 gün) yağmur yağan gün sayısı 60'tır. Meteorolojinin yağmurlu günlerde "Yağmurlu" tahmini yapma olasılığı %80'dir. Ancak yağmur yağmayan günlerde de meteorolojinin yanlışlıkla %3.93 oranında "Yağmurlu" tahmini yaptığı gözlemlenmiştir (toplam 12 gün).

Sabah haberlerinde meteorolojinin **"Bugün yağmur yağacak"** tahmininde bulunduğu bilindiğine göre, o gün **GERÇEKTEN YAĞMUR YAĞMA OLASILIĞI** nedir?

Çözüm ve İki Yönlü Tablo Analizi:

Olaylar:

- Y: Yağmur yağması ($P(Y) = 60/365$)
- T: Yağmurlu tahmini yapılması

Gerçekleşen Yağmurlu Günler (Y) = 60 gün
Doğru Yağmur Tahmini yapılması: $60 \times 0.80 = 48$ gün
Yağmur Yağmayan Günler (Y') = 305 gün

Yanlış Yağmur Tahmini yapılması: 12 gün
Toplam "Yağmurlu" Tahmin Edilen Gün Sayısı (T) = $48 + 12 = 60$ gün

Koşullu Olasılık Hesabı:

$$P(Y|T) = P(Y \cap T) / P(T) = (48 / 365) / (60 / 365) = 48 / 60 = 0.80 \ (\%80.0)$$

Problem 2: Meteorolojik Tahmin ve Gerçekleşme Tablosu (365 Gün)

	Yağmur Yağdı (Y)	Yağmur Yağmadı (Y')	Toplam
Tahmin: Yağmurlu (T)	48 gün	12 gün	60 gün
Tahmin: Yağmursuz (T')	12 gün	293 gün	305 gün
Toplam	60 gün	305 gün	365 gün

Şekil 2: Meteorolojik Tahmin ve Gerçekleşme Kontenjans Tablosu

Gerçek Yaşam Yorumu: Meteoroloji "Yağmur yağacak" dediğinde yağmur yağma olasılığı **%80**'dir. Vatandaşlar şemsiye alma veya dış mekân etkinliklerini iptal etme kararını bu %80'lik bağımlı olasılık verisine dayanarak risk analiziyle vermelidir.

Problem 3: Sanayide Kalite Kontrol ve Tüketici Risk Analizi (Bilinçli Tüketim)

Problem Senaryosu:
Bir teknoloji mağazası aynı model kulaklıkları iki farklı fabrikadan temin etmektedir. Mağazadaki ürünlerin %60'ı A fabrikasından, %40'ı B fabrikasından gelmektedir. A fabrikasının ürettiği ürünlerin hatalı çıkma oranı %2, B fabrikasının ürettiği ürünlerin hatalı çıkma oranı ise %5'tir.

Satın alınan bir kulaklığın **HATALI/KUSURLU** olduğu görüldüğüne göre, bu hatalı ürünün **A FABRİKASINDA ÜRETİLMİŞ OLMA OLASILIĞI** kaçtır?

Çözüm ve Risk Analizi:

- $P(A) = 0.60$, $P(B) = 0.40$
- $P(K|A) = 0.02$ (A'dan gelen ürünün kusurlu olma olasılığı)
- $P(K|B) = 0.05$ (B'den gelen ürünün kusurlu olma olasılığı)

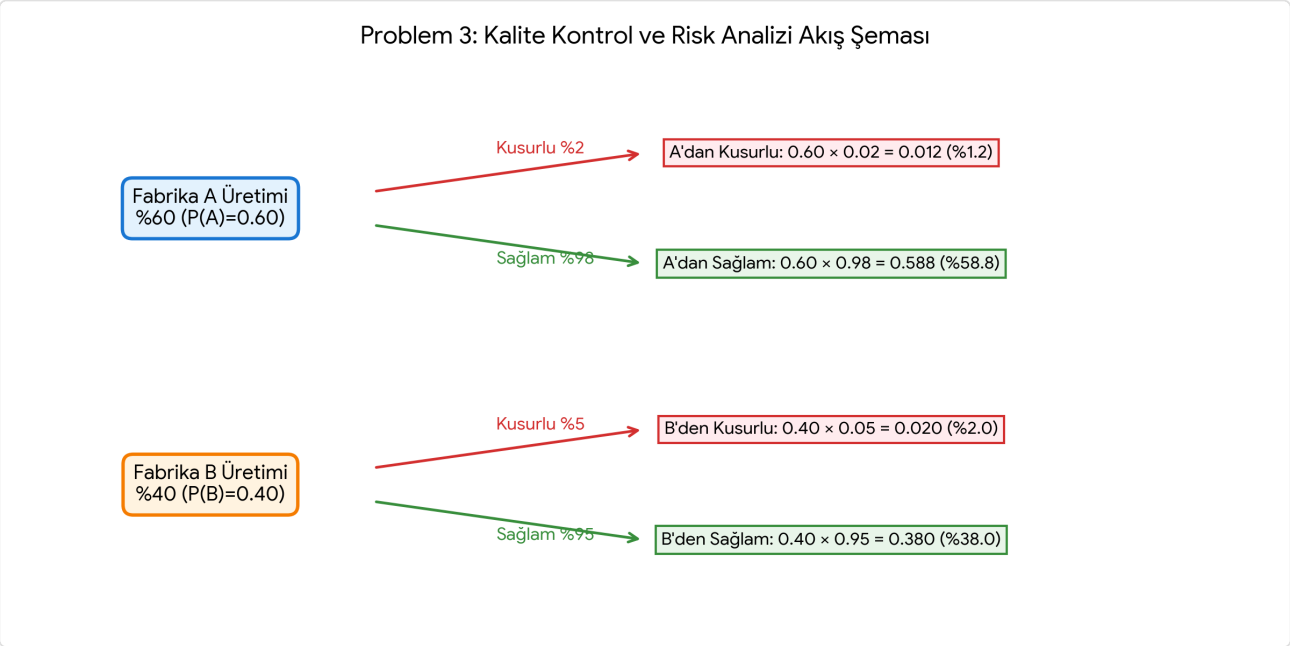
Toplam Kusurlu Ürün Olasılığı $P(K)$:

$$P(K) = P(A) \times P(K|A) + P(B) \times P(K|B)$$

$$P(K) = (0.60 \times 0.02) + (0.40 \times 0.05) = 0.012 + 0.020 = 0.032 \ (\%3.2)$$

Bayes Teoremi ile A Fabrikasından Olma Olasılığı $P(A|K)$:

$$P(A|K) = P(A \cap K) / P(K) = 0.012 / 0.032 = 0.375 \ (\%37.5)$$



Şekil 3: Fabrika Üretim ve Kusur Oranları Akış Şeması

Gerçek Yaşam Yorumu: A fabrikası piyasadaki ürünlerin çoğunluğunu (%60) üretmesine rağmen, kalite kontrolü B fabrikasından çok daha iyi olduğu için (%2 vs %5 kusur), elimizdeki hatalı bir ürünün A fabrikasından gelmiş olma olasılığı yalnızca **%37.5**'tir. Hatalı ürünlerin %62.5'i B fabrikasından kaynaklanmaktadır. Firma yönetimi tedarik zinciri anlaşmalarında B fabrikasına kalite uyarısı yapmalıdır.

Problem 4: E-posta Spam Filtresi ve Siber Güvenlik Risk Tahmini (Dijital Veri)

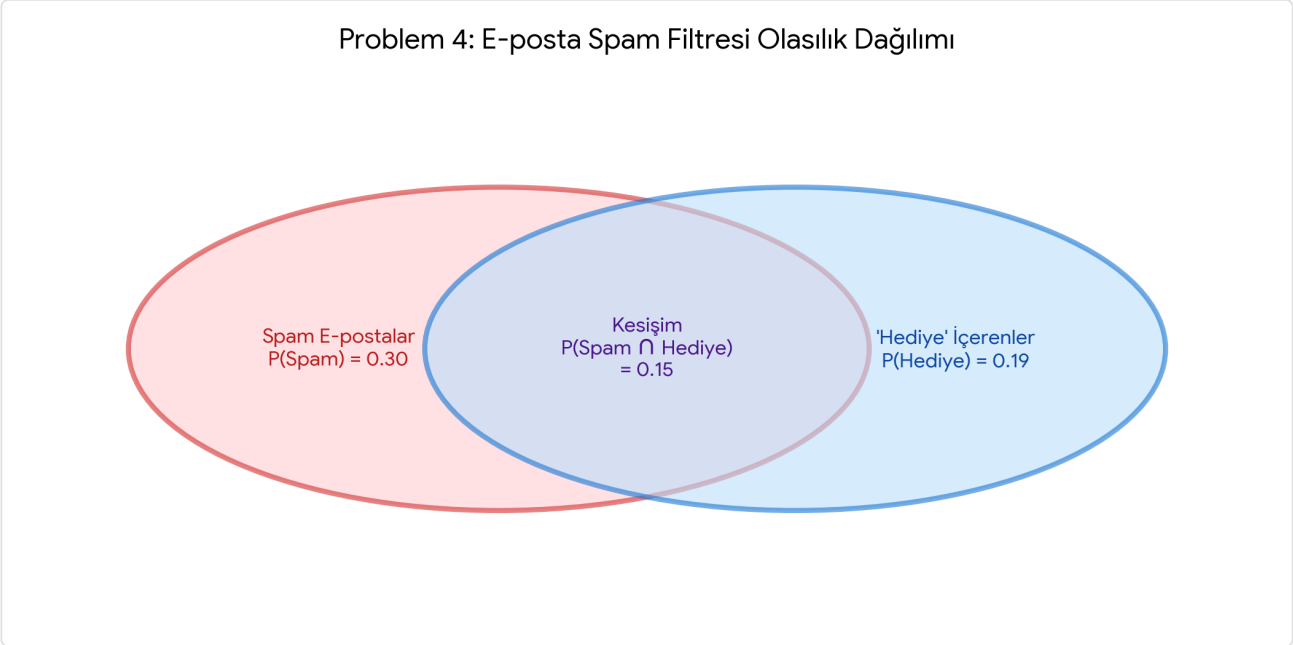
Problem Senaryosu:
Bir e-posta sunucusunda gelen tüm postaların %30'u spam (istenmeyen) e-postadır ($P(Spam) = 0.30$). Filtre sisteminin analizine göre, spam e-postaların %50'sinde "Hediye" kelimesi geçmektedir ($P(Hediye|Spam) = 0.50$). Spam olmayan normal e-postaların ise %5'inde "Hediye" kelimesi geçmektedir ($P(Hediye|Normal) = 0.05$).

Gelen bir e-postada **"HEDİYE"** kelimesinin geçtiği tespit edildiğine göre, bu e-postanın **SPAM OLMA OLASILIĞI** nedir?

Çözüm ve Algoritma Hesabı:

1. Spam ve Hediye Kesişimi: $P(Spam \cap Hediye) = 0.30 \times 0.50 = 0.15$
2. Normal ve Hediye Kesişimi: $P(Normal \cap Hediye) = 0.70 \times 0.05 = 0.035$
3. Herhangi bir e-postada "Hediye" geçme olasılığı $P(Hediye)$:
$P(Hediye) = 0.15 + 0.035 = 0.185$ (%18.5)

4. "Hediye" içeren e-postanın Spam olma olasılığı $P(Spam|Hediye)$:
$P(Spam|Hediye) = 0.15 / 0.185 \approx 0.8108$ (%81.08)



Şekil 4: Spam Filtresi Kelime Kesişim Venn Şeması

Gerçek Yaşam Yorumu: E-posta filtreleme algoritmaları tam olarak bu Bayesçi yöntemi kullanır. "Hediye" kelimesini içeren bir e-postanın spam olma olasılığı **%81.08** gibi yüksek bir değere ulaştığı için, e-posta istemcileri bu mesajı otomatik olarak "Spam Klasörü"ne yönlendirir.

3. SONUÇ VE ÖZ DEĞERLENDİRME

Bu performans görevinde, koşullu olasılık ve Bayes teoreminin soyut bir matematik konusunun ötesinde, günlük hayatta karar alma mekanizmalarının temelini oluşturduğu açıkça görülmüştür.

- **Sağlık Sektöründe:** Nadir hastalıklarda tek test sonucuna göre hüküm verilmemesi gerektiği, yalancı pozitiflik riskinin göz önünde bulundurulmasının hayatı önem taşıdığı,
- **Meteorolojide:** Geçmiş verilere dayalı koşullu tahminlerin günlük planlamalardaki güvenilirliği,
- **Sanayide:** Hatalı ürün analizlerinde üretim hacmi ile kusur oranının birlikte değerlendirilmesi gerektiği,
- **Bilişimde:** Spam filtrelerinin ve yapay zeka sınıflandırıcılarının metin bazlı koşullu olasılıklar üzerine kurulduğu anlaşılmıştır.

Geliştirilen 4 farklı kurgu ve görselleştirme ile veriye dayalı olasılık tahmini yapabilme becerisi pekiştirilmiştir.