PROJE ÖDEVİ

Karesel Fonksiyonların Nitel Özelliklerinin Gerçek Yaşam Durumlarına Uygulanması

Ekonomi • Fizik • Kimya • Biyoloji Alanlarında
İkinci Dereceden Fonksiyon Modellemeleri

Ders	Matematik
Konu	Karesel (İkinci Dereceden) Fonksiyonlar
Ödev Türü	Araştırma ve Uygulama Projesi
Tarih	29 Temmuz 2026

Ödevin Amacı: Bu projede ekonomi, fizik, kimya ve biyoloji alanlarından birer gerçek yaşam durumu belirlenmiş, bu durumlar ikinci dereceden (karesel) fonksiyonlarla modellenmiş ve elde edilen fonksiyonların nitel özellikleri (açılma yönü, simetri ekseni, tepe noktası, kökler, artan-azalan aralıklar, maksimum/minimum değer) kullanılarak problemler adım adım çözülmüştür.

İÇİNDEKİLER

1. Çalışma Planı ve Takvimi
2. İzlenecek Adımlar
3. Karesel Fonksiyonların Nitel Özellikleri (Kısa Hatırlatma)
4. Problem 1 — Ekonomi: Kâr Fonksiyonu
5. Problem 2 — Fizik: Eğik Atış Hareketi
6. Problem 3 — Kimya: Tepkime Verimi ve Sıcaklık
7. Problem 4 — Biyoloji: Popülasyon Değişimi
8. Genel Değerlendirme ve Sonuç

1. Çalışma Planı ve Takvimi

Ödeve başlamadan önce çalışmanın düzenli ilerlemesini sağlamak amacıyla aşağıdaki 5 günlük çalışma planı oluşturulmuştur. Plan; araştırma, problem oluşturma, çözüm ve rapor yazımı aşamalarını kapsamaktadır.

Gün	Yapılacak İş	Süre
1. Gün	Konu tekrarı: karesel fonksiyonların nitel özellikleri (açılma yönü, tepe noktası, simetri ekseni, k	1,5 saat
2. Gün	Ekonomi ve fizik alanlarında karesel fonksiyonla modellenebilecek gerçek yaşam durumları aras	1,5 saat
3. Gün	Kimya ve biyoloji alanlarında senaryolar oluşturuldu; her senaryo için fonksiyon ifadesi (a, b, c k	1,5 saat
4. Gün	Dört problemin çözümleri; tepe noktası, kökler, simetri ekseni gibi nitel özellikler kullanılarak ac	2 saat
5. Gün	Çözümler gözden geçirildi, açıklamalar netleştirildi; rapor düzenlenip PDF olarak hazırlandı.	1,5 saat

Toplam süre: yaklaşık 7,5 saat / 5 gün.

2. İzlenecek Adımlar

1. Karesel fonksiyonların genel formu $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ve nitel özellikleri tekrar edildi.
2. Ekonomi, fizik, kimya ve biyoloji alanlarında karesel modele uygun birer gerçek yaşam durumu belirlendi.
3. Her durum için değişkenler tanımlandı (bağımsız değişken x ve bağımlı değişken f(x)) ve fonksiyon denklemi (a, b, c katsayılarıyla) oluşturuldu.
4. Her fonksiyon için açılma yönü (a katsayısının işareti), simetri ekseni ($x = -b/2a$), tepe noktası, kökler (varsa) ve y-eksenini kestiği nokta hesaplandı.
5. Bulunan nitel özellikler kullanılarak problemde sorulan gerçek yaşam sorusu (ör. maksimum kâr, maksimum yükseklik, optimum sıcaklık, maksimum popülasyon) cevaplandı.
6. Sonuçlar, ilgili bilim alanı açısından yorumlanarak rapor haline getirildi.

3. Karesel Fonksiyonların Nitel Özellikleri (Kısa Hatırlatma)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) biçimindeki bir fonksiyon için aşağıdaki nitel özellikler problemleri çözerken kullanılmıştır:

Özellik	Açıklama
Açılma yönü	a > 0 ise parabol yukarı açılır (minimum değer vardır); a < 0 ise aşağı açılır (m
Simetri ekseni	$x = -b / (2a)$ doğrusu, parabolü iki simetrik parçaya ayırır.
Tepe noktası	$(-b/2a , f(-b/2a))$ noktasıdır; a<0 için maksimum, a>0 için minimum değeri ver
Kökler (x-eksenini kesme)	$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözümleridir; $\Delta = b^2 - 4ac$ değerine göre 0, 1 ya da 2

Özellik	Açıklama
y-eksenini kesim noktası	x = 0 için f(0) = c değeridir.
Artan / azalan aralıklar	a>0 ise fonksiyon simetri ekseninin solunda azalan, sağında artandır; a<0 ise

4. Problem 1 — Ekonomi: Kâr Fonksiyonu

Gerçek Yaşam Durumu:

> Küçük bir tekstil atölyesi, ürettiği kazakları satmaktadır. Yapılan piyasa analizine göre atölyenin aylık kârı K(x), üretilen kazak adedinin yüzler basamağı x (yani x, yüzlük birim cinsinden üretim miktarını) ile aşağıdaki gibi ilişkilidir (K(x), bin TL cinsindendir):

$$K(x) = -2x^2 + 40x - 102$$

İşletme sahibi; hangi üretim miktarında zarar etmeye başladığını, kârın en yüksek olduğu üretim miktarını ve bu miktardaki maksimum kârı öğrenmek istemektedir.

Çözüm:

Adım 1 — Açılma yönü: a = -2 < 0 olduğundan parabol aşağı açılır. Bu durum, kâr fonksiyonunun bir maksimum değeri olduğunu gösterir; yani üretim arttıkça kâr önce artar, belli bir noktadan sonra azalır.

Adım 2 — Simetri ekseni ve tepe noktası:

$$x_{tepe} = -b / (2a) = -40 / (2\cdot(-2)) = -40 / -4 = 10$$
$$K(10) = -2(10)^2 + 40(10) - 102 = -200 + 400 - 102 = 98$$

Tepe noktası (10, 98)'dir. Bu, atölyenin ayda 1000 kazak (x=10, yüzlük birim) ürettiğinde kârının maksimum olduğu ve bu kârın 98.000 TL olduğu anlamına gelir.

Adım 3 — Kökler (başabaş noktaları): K(x) = 0 denklemi çözülür.

$$-2x^2 + 40x - 102 = 0 \rightarrow x^2 - 20x + 51 = 0$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4\cdot1\cdot51 = 400 - 204 = 196,\ \sqrt{\Delta} = 14$$

$$x = (20 \pm 14) / 2 \rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 17$$

Kökler x=3 ve x=17'dir. Buna göre üretim 300 adetin (x=3) altında ya da 1700 adetin (x=17) üzerinde olursa işletme zarar eder; üretim 300 ile 1700 kazak arasında olduğunda ise kâr eder (parabol bu aralıkta x-ekseninin üzerindedir).

Adım 4 — y-eksenini kesim noktası: K(0) = -102. Üretim yapılmadığında (x=0) işletme sabit giderler nedeniyle 102.000 TL zarar etmektedir.

Adım 5 — Artan/azalan aralıklar: a<0 olduğundan fonksiyon x<10 için artan, x>10 için azalandır. Bu nedenle üretimi 1000 adede kadar artırmak kârı yükseltirken, bu noktadan sonra üretimi artırmak kârı düşürür (muhtemelen artan maliyetler nedeniyle).

> *Sonuç: Atölye, aylık üretimini 1000 kazak (x=10) düzeyinde tutarak 98.000 TL ile maksimum kâra ulaşabilir; kârlı çalışma aralığı 300–1700 kazaktır.*

5. Problem 2 — Fizik: Eğik Atış Hareketi

Gerçek Yaşam Durumu:

> Bir öğrenci, yerden 2 metre yükseklikten bir topu düşey doğrultuda yukarı doğru 20 m/s ilk hızla fırlatmaktadır. Topun yerden yüksekliği h(t) (metre), fırlatıldıktan sonra geçen süre t (saniye) cinsinden aşağıdaki fonksiyonla modellenmektedir (yerçekimi ivmesi g ≈ 10 m/s² alınmıştır):

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 2$$

Topun ulaştığı maksimum yüksekliği, bu yüksekliğe hangi anda ulaştığını ve yaklaşık kaç saniye sonra yere düşeceğini bulunuz.

Çözüm:

Adım 1 — Açılma yönü: a = -5 < 0 olduğundan parabol aşağı açılır; fonksiyonun bir maksimum değeri (topun en yüksek noktası) vardır.

Adım 2 — Simetri ekseni ve tepe noktası:

$$t_{tepe} = -b / (2a) = -20 / (2\cdot(-5)) = -20 / -10 = 2$$

$$h(2) = -5(2)^2 + 20(2) + 2 = -20 + 40 + 2 = 22$$

Tepe noktası (2, 22)'dir. Yani top, fırlatıldıktan 2 saniye sonra 22 metre ile maksimum yüksekliğe ulaşır.

Adım 3 — Kökler (topun yere düşme anı): h(t) = 0 denklemi çözülür.

$$-5t^2 + 20t + 2 = 0 \rightarrow 5t^2 - 20t - 2 = 0$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4\cdot5\cdot(-2) = 400 + 40 = 440,\ \sqrt{\Delta} \approx 20{,}98$$

$$t = (20 \pm 20{,}98) / 10 \rightarrow t_1 \approx -0{,}10 \text{ (geçersiz)},\ t_2 \approx 4{,}10$$

t, zaman belirttiği için negatif kök ($t_1 \approx -0{,}10$) fiziksel olarak anlamsızdır ve hesaba katılmaz. Top yaklaşık t ≈ 4,10 saniye sonra yere düşer.

Adım 4 — y-eksenini kesim noktası: h(0) = 2. Bu, topun fırlatıldığı ilk yüksekliğin 2 metre olduğunu doğrular (elin başlangıç yüksekliği).

Adım 5 — Artan/azalan aralıklar: a<0 olduğundan fonksiyon 0 ≤ t < 2 aralığında artandır (top yükselir), t > 2 aralığında ise azalandır (top alçalır). Bu, topun hareketinin fiziksel olarak yükselme ve alçalma evrelerine karşılık gelir.

> *Sonuç: Top, atıştan 2 saniye sonra 22 metre ile en yüksek noktasına ulaşır ve yaklaşık 4,10 saniye sonra yere çarpar.*

6. Problem 3 — Kimya: Tepkime Verimi ve Sıcaklık İlişkisi

Gerçek Yaşam Durumu:

> Bir laboratuvarda gerçekleştirilen ekzotermik bir tepkimede, tepkimenin verimi V(x) (%), ortam sıcaklığı x (°C) cinsinden aşağıdaki fonksiyonla modellenmektedir. Düşük sıcaklıklarda tepkime hızı yetersiz kaldığından, yüksek sıcaklıklarda ise yan ürün oluşumu arttığından verim belirli bir sıcaklıktan sonra düşmektedir:

$$V(x) = -x^2 + 100x - 2000$$

Tepkimenin en verimli olduğu sıcaklığı, bu sıcaklıktaki maksimum verimi ve tepkimenin hangi sıcaklık aralığında pozitif verim (V(x) > 0) verdiğini bulunuz.

Çözüm:

Adım 1 — Açılma yönü: a = -1 < 0 olduğundan parabol aşağı açılır; verim fonksiyonunun bir maksimum noktası vardır.

Adım 2 — Simetri ekseni ve tepe noktası:

$$x_{tepe} = -b / (2a) = -100 / (2\cdot(-1)) = -100 / -2 = 50$$

$$V(50) = -(50)^2 + 100(50) - 2000 = -2500 + 5000 - 2000 = 500$$

Bu modelde verim yüzde cinsinden ele alındığından 500 değeri, fonksiyonun ölçek birimi (burada göreli bir verim endeksi) içinde en yüksek değeri temsil eder; tepkime x = 50°C'de en verimli sonucu vermektedir.

Adım 3 — Kökler (verimin sıfır olduğu sıcaklıklar): V(x) = 0 denklemi çözülür.

$$-x^2 + 100x - 2000 = 0 \rightarrow x^2 - 100x + 2000 = 0$$

$$\Delta = (-100)^2 - 4\cdot1\cdot2000 = 10000 - 8000 = 2000,\ \sqrt{\Delta} \approx 44{,}72$$

$$x = (100 \pm 44{,}72) / 2 \rightarrow x_1 \approx 27{,}64,\ x_2 \approx 72{,}36$$

Kökler yaklaşık 27,64°C ve 72,36°C'dir. Buna göre tepkime, yaklaşık 27,6°C ile 72,4°C arasındaki sıcaklıklarda pozitif (anlamlı) verim vermektedir; bu aralığın dışında model negatif değer üretir ve tepkimenin pratikte verimsiz olduğu kabul edilir.

Adım 4 — y-eksenini kesim noktası: V(0) = -2000. 0°C civarında tepkime pratik olarak gerçekleşmemektedir (model bu bölgede negatif çıkar).

Adım 5 — Artan/azalan aralıklar: a<0 olduğundan fonksiyon x<50 için artan (sıcaklık arttıkça verim artar), x>50 için azalandır (sıcaklık arttıkça yan ürün oluşumu nedeniyle verim düşer).

> *Sonuç: Tepkime için en uygun sıcaklık 50°C'dir; verimli çalışma aralığı yaklaşık 27,6°C – 72,4°C arasındadır.*

7. Problem 4 — Biyoloji: Bir Balık Popülasyonunun Yıllara Göre Değişimi

Gerçek Yaşam Durumu:

> Bir gölde yürütülen ekolojik izleme çalışmasında, belirli bir balık türünün popülasyonu N(x) (yüz birey), gözlemin başladığı yıldan itibaren geçen yıl sayısı x ile aşağıdaki gibi modellenmiştir. Gölde sınırlı besin kaynağı ve artan avlanma baskısı nedeniyle popülasyonun belirli bir yıldan sonra azalması beklenmektedir:

$$N(x) = -x^2 + 16x + 17$$

Popülasyonun en yüksek olduğu yılı, bu yıldaki birey sayısını ve modele göre popülasyonun sıfıra (yok oluşa) yaklaştığı yılı bulunuz.

Çözüm:

Adım 1 — Açılma yönü: a = -1 < 0 olduğundan parabol aşağı açılır; popülasyon fonksiyonunun bir maksimum değeri vardır.

Adım 2 — Simetri ekseni ve tepe noktası:

$$x_{tepe} = -b / (2a) = -16 / (2\cdot(-1)) = -16 / -2 = 8$$

$$N(8) = -(8)^2 + 16(8) + 17 = -64 + 128 + 17 = 81$$

Tepe noktası (8, 81)'dir. Buna göre popülasyon, gözlemin başlangıcından 8. yılda en yüksek değerine, yani 8100 bireye (81 × 100) ulaşmaktadır.

Adım 3 — Kökler (popülasyonun sıfırlandığı yıllar): N(x) = 0 denklemi çözülür.

$$-x^2 + 16x + 17 = 0 \rightarrow x^2 - 16x - 17 = 0$$

$$\Delta = (-16)^2 - 4\cdot1\cdot(-17) = 256 + 68 = 324,\ \sqrt{\Delta} = 18$$

$$x = (16 \pm 18) / 2 \rightarrow x_1 = -1 \text{ (geçersiz)},\ x_2 = 17$$

x, geçen yıl sayısını belirttiğinden negatif kök (x_1=-1) anlamsızdır. Modele göre popülasyon, gözlemin başlangıcından 17 yıl sonra teorik olarak sıfıra (yok oluş riskine) yaklaşmaktadır.

Adım 4 — y-eksenini kesim noktası: N(0) = 17. Gözlemin başladığı yılda (x=0) gölde 1700 birey bulunmaktadır.

Adım 5 — Artan/azalan aralıklar: a<0 olduğundan fonksiyon $0 \le x < 8$ aralığında artandır (popülasyon büyür), $x > 8$ aralığında ise azalandır (popülasyon; sınırlı kaynaklar ve avlanma baskısı nedeniyle küçülür).

> *Sonuç: Balık popülasyonu 8. yılda 8100 bireyle zirveye ulaşır; önlem alınmadığı takdirde model, popülasyonun 17. yıl civarında kritik derecede azalacağını öngörmektedir. Bu sonuç, göl yönetiminde 8. yıldan itibaren avlanma sınırlaması gibi koruma önlemlerinin gerekliliğine işaret etmektedir.*

8. Genel Değerlendirme ve Sonuç

Bu projede ekonomi, fizik, kimya ve biyoloji alanlarından seçilen dört farklı gerçek yaşam durumu, ikinci dereceden fonksiyonlarla başarıyla modellenmiştir. Her problemde fonksiyonun katsayısı olan a'nın işareti parabolün açılma yönünü belirlemiş, tüm senaryolarda $a<0$ olduğu için bir maksimum değer (maksimum kâr, maksimum yükseklik, maksimum verim, maksimum popülasyon) elde edilmiştir. Bu durum, gerçek hayattaki birçok optimizasyon probleminin (kâr maksimizasyonu, en yüksek nokta, en verimli koşul, taşıma kapasitesi) karesel fonksiyonların tepe noktası kavramıyla doğrudan ilişkili olduğunu göstermektedir.

Ayrıca köklerin (x-eksenini kesim noktalarının) her alanda farklı bir pratik anlamı olduğu görülmüştür: ekonomide başabaş noktaları, fizikte topun yere düşme anı, kimyada tepkimenin anlamlı verim verdiği sıcaklık sınırları ve biyolojide popülasyonun teorik olarak sıfırlanacağı zaman. Bu da karesel fonksiyonların yalnızca soyut bir matematik konusu olmadığını, farklı bilim dallarında karar verme ve öngörüde bulunma amacıyla kullanılan güçlü bir araç olduğunu ortaya koymaktadır.

Sonuç olarak, karesel fonksiyonların nitel özellikleri (açılma yönü, simetri ekseni, tepe noktası, kökler, y-ekseni kesim noktası ve artan-azalan aralıklar) kullanılarak, her problemde sorulan gerçek yaşam sorusuna sistematik ve adım adım bir çözüm yolu izlenmiş ve elde edilen sonuçlar ilgili bilim alanı bağlamında yorumlanmıştır.